Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 5

II.4. Náhodné vektory

Pod pojmem náhodný vektor v rámci tohoto cvičení chápeme dvojici náhodných veličin (X, Y). Navíc se zde omezíme jen na případy, kdy jsou obě náhodné veličiny diskrétní a nebo jsou obě spojité.

Definice. (Náhodný vektor)

- Diskrétní náhodný vektor je dvojice (X, Y) nabývající nejvýše spočetně mnoha hodnot (x_i, y_j).
- Spojitý náhodný vektor je dvojice (X, Y) nabývající nekonečně mnoha hodnot.

Definice. (Sdružené rozdělení)

- Sdružené rozdělení diskrétního náhodného vektoru (X, Y) je určeno pravděpodobnostmi

  $$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

  a platí $\sum_i \sum_j p_{i,j} = 1$.

- Sdružené rozdělení spojitého náhodného vektoru (X, Y) je určeno sdruženou hustotou $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, pro kterou platí

  $$\mathbb{P}((X, Y) \in B) = \iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad B \subset \mathbb{R}^2$$

  a platí $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Definice. (Marginální rozdělení)

- Marginální rozdělení diskrétního náhodného vektoru (X, Y) nabývající hodnot $(x_i, y_j); i, j \in \mathbb{N}$ jsou určena marginálními pravděpodobnostmi

  $$p_i^X = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

  $$p_j^Y = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

- Marginální rozdělení spojitého náhodného vektoru (X, Y) jsou určena marginálními hustotami

  $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

  $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Definice. (Nezávislost náhodných veličin)

- Dvě diskrétní náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, pokud sdružené pravděpodobnosti vektoru (X, Y) spočítáme jako součin marginálních pravděpodobností X a Y, tj.

  $$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$$

  pro každé (i, j), pro které (X, Y) nabývá nějakou hodnotu (x_i, y_j).

- Dvě spojité náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, pokud sdruženou hustotu vektoru (X, Y) spočítáme jako součin sdružených hustot X a Y, tj.

  $$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

  pro skoro všechny $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.